

Waar stond de camera?

Rudi Penne*

1 Het probleem

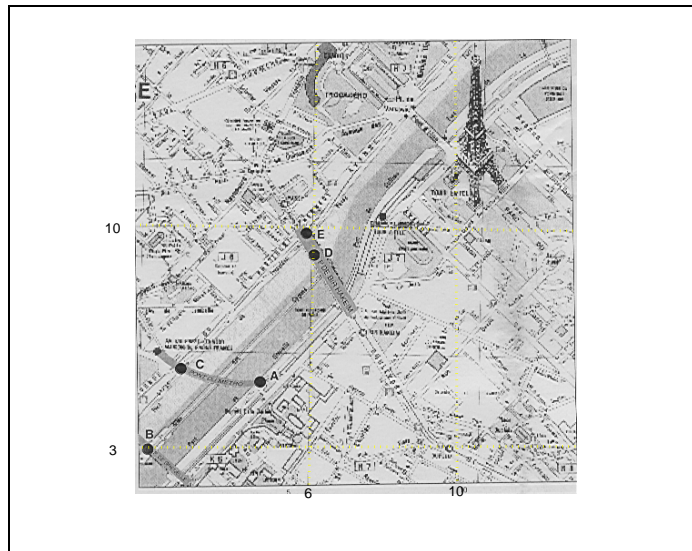
Stel dat we een foto in onze handen krijgen. Maar stel dat we de fotograaf niet kennen of niet kunnen bereiken. We kunnen hem dus niet vragen waar hij stond op het moment van de opname. We hebben ook geen informatie over de gebruikte camera en de betreffende lensinstellingen. Is het dan mogelijk om puur uit de beeldgegevens de plaats van de camera te berekenen? Het verrassende antwoord op deze vraag is: “soms wel”.

Bekijk bijvoorbeeld onderstaande foto:



We herkennen duidelijk enkele bruggen over de Seine in de Franse hoofdstad. Hieronder hebben we vijf herkeningspunten aangeduid op een plattegrond van Parijs: *A, B, C, D, E*.

*departement IWT, Karel de Grote-Hogeschool

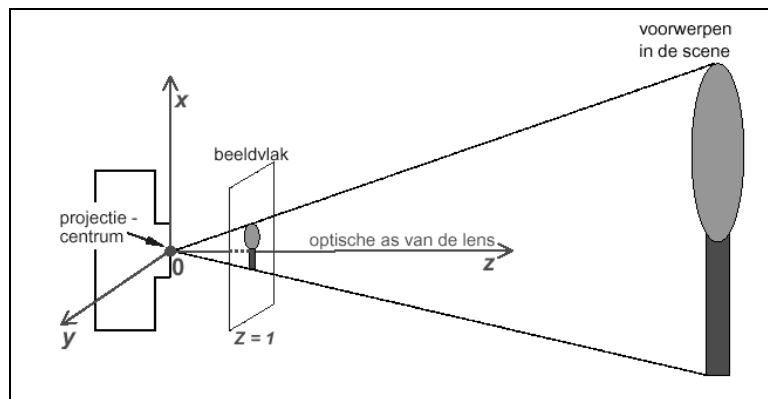


In dit document zullen we aantonen dat, in het algemeen, vijf herkenningpunten (met gekende locatie) op een foto volstaan om de plaats van de camera op de plattegrond te bepalen. Bovendien zullen we de wiskundige procedure uitleggen die de gezochte cameraplaats oplevert. We schenken vooral aandacht aan het speciale geval waarin juist drie van de vijf herkenningpunten op eenzelfde rechte liggen. Dan namelijk kan de cameraplaats gereconstrueerd worden als snijpunt van twee rechten.

Ook het geval met de vijf herkenningpunten in algemene ligging wordt behandeld, maar dan zal de procedure moeilijker worden en moeten snijpunten van kegelsneden berekend worden. Deze paragrafen worden met een sterretje aangeduid en zijn optioneel.

2 Perspectieve projectie

De fotografie heeft een hele technologische evolutie ondergaan sinds de eerste *camera obscura*. Nochtans is de manier waarop het beeld tot stand komt al die tijd min of meer onveranderd gebleven, namelijk door middel van *perspectieve projectie*. Meer bepaald, het bekeken tafereel wordt vanuit een punt (in de lens) op een vlak geprojecteerd (voor een digitale camera is dit een *CCD-rooster* dat het invallend licht elektronisch registreert; deze roosterpunten worden vaak *pixels* genoemd).

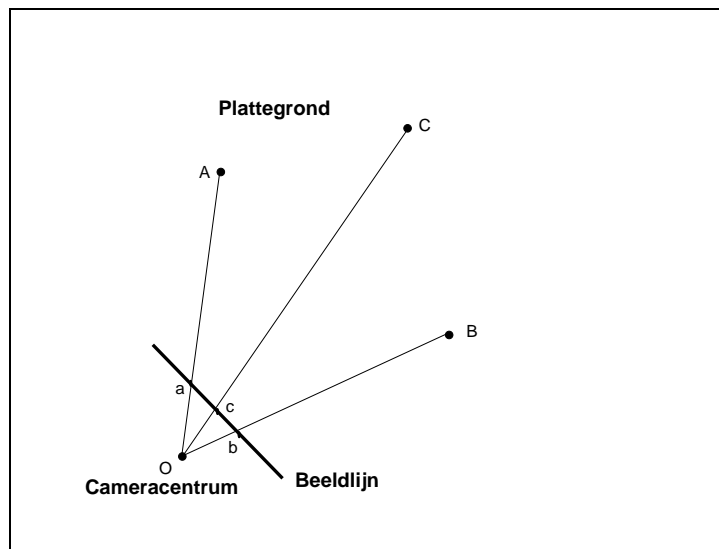


Deze perspectieve projectie is natuurlijk een wiskundig model voor het nemen van camerabeelden, en zoals elk model dus slechts een benadering van de werkelijkheid. Beeldefecten die ontstaan door de lenskromming, worden bijvoorbeeld in dit model genegeerd.

In ons vraagstuk speelt de hoogte van gebouwen en van andere tafereelpunten geen rol, alleen hun plaats op de plattegrond. Dit betekent dat we onze wereld mogen herleiden tot een plat vlak, wat concreet gebeurt door een loodrechte projectie van de wereld op de grond (dat de aarde eigenlijk rond is, valt zelfs in een bruisende stad als Parijs niet op).

Op beeldniveau betekent dit dat we enkel de horizontale afstanden op de foto beschouwen. De aangeduide punten worden dus verticaal op de onderste rand geprojecteerd (zie eerste foto). Hierbij nemen we wel aan dat de camera niet scheef gehouden wordt, dus dat de horizon effectief horizontaal loopt. Als dat niet zo is, kunnen we daar wel een mouw aan passen, maar we sluiten deze situaties uit in dit document om extra complicaties te vermijden.

We besluiten dat de genomen foto overeenkomt met de projectie van het "leefvlak" op een "beeldlijn" vanuit het (onbekende maar gezochte) cameracentrum (zie onderstaande figuur).

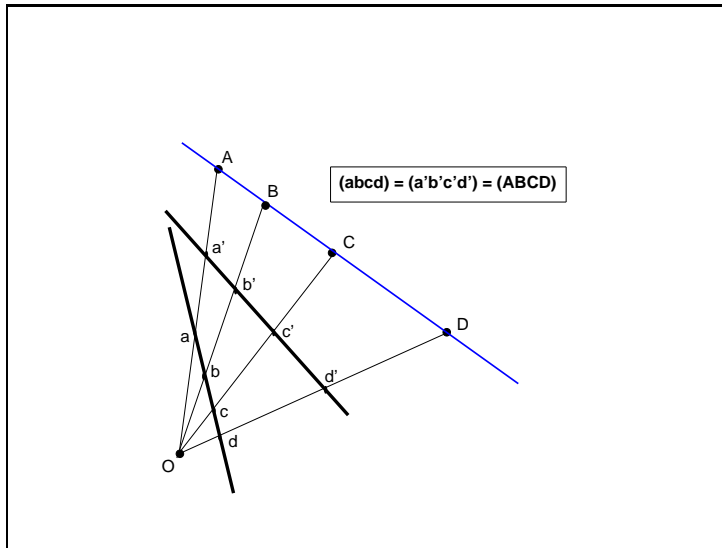


3 De dubbelverhouding

Het gefotografeerde beeld verschilt uiteraard met de werkelijkheid. Er treden namelijk *perspectieve vervormingen* op. Zo weet iedereen dat de mensen en de dingen op een foto kleiner zijn dan in werkelijkheid. Hiernaast zien we duidelijk dat in het beeld het lijnstuk $[a, b]$ kleiner is dan het oorspronkelijke lijnstuk $[A, B]$. Maar de perspectieve vervorming omhelst meer dan het toepassen van een schaalfactor. Ook de onderlinge verhouding van afstanden wijzigt. Beschouw bijvoorbeeld drie punten A, B, C op een lijn (zoals hiernaast). We definiëren de *deelverhouding* (ABC) als een verhouding van twee georiënteerde afstanden:

$$(ABC) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

Bijvoorbeeld op het tennisveld hiernaast is geweten dat B in het midden ligt van $[A, C]$ en dus is $\overline{AC} = 2\overline{BC}$ of $(ABC) = 2$. Maar als we dit op de foto nameten, bijvoorbeeld met “pixel” als eenheid, dan vinden we $\overline{AC} = 135,5$ en $\overline{BC} = 74,7$. Dus op de foto vinden we dat $(ABC) \approx 1,8 \neq 2$. M.a.w., de onderlinge afstandsverhouding wordt niet bewaard door een perspectieve projectie en kan dus in het algemeen niet uit een foto verkregen worden!



Maar voor vier punten A, B, C, D op een lijn kunnen we wel een getal $(ABCD)$ berekenen dat niet wijzigt onder perspectieve projectie; we spreken dan ook van een *invariant*. Dit getal is de verhouding van twee deelverhoudingen en wordt logischerwijs de *dubbelverhouding* genoemd (“cross ratio” in het Engels, “birapport” in het Frans):

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}$$

Men kan bewijzen (en ook zelf name-ten) dat voor de respectievelijke beeldpunten a, b, c, d :

$$(abcd) = (ABCD)$$

Toepassing: Lokalisering van een vierde onbekend punt.

Op het tennisveld hieronder zijn vier collineaire punten gegeven, waarvan drie een bekende locatie hebben omdat ze tot de vaste lijnen behoren. Het vierde punt D is bijvoorbeeld een tennisbal. We kunnen nu de plaats van D bepalen op het tennisveld. Hiervoor berekenen we eerst de dubbelverhouding $\rho = (A, B, C, D)$ van de vier punten in het beeld. Je mag de onderlinge afstanden meten in om het even welke eenheid. Wij hebben geopteerd voor pixeleenheden, omdat de pixelcoördinaten van de punten van een digitale foto door de computer gemakkelijk bepaald worden (wat ons het meten bespaarde):

$$\overline{AC} = 172,8; \overline{BD} = -72,4; \overline{BC} = 66,1; \overline{AD} = 161,0$$

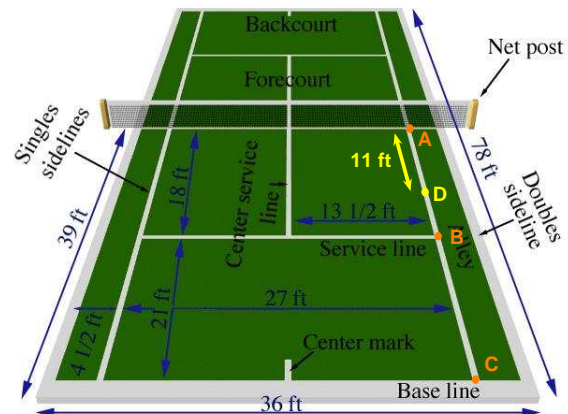
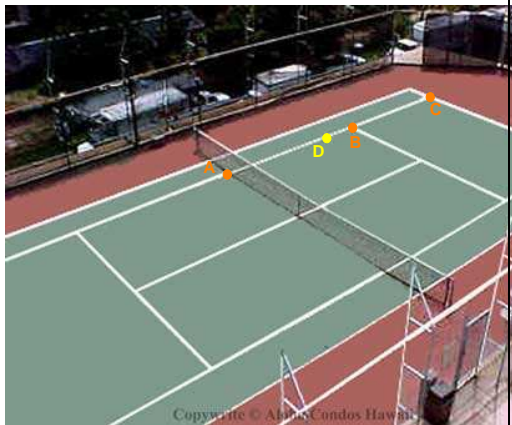
(we hebben de positieve afstanden van A naar C georiënteerd, en dus is \overline{BD} negatief).

Hieruit volgt dan dat $\rho \approx -1,175$.

Anderzijds kunnen we in de formule van de dubbelverhouding oplossen naar D , en vinden we dus D in functie van A, B, C en ρ :

$$D = \frac{\rho}{\rho - d}A - \frac{d}{\rho - d}B \quad \text{met } d = (ABC)$$

Op de plattegrond kiezen we A als oorsprong, $B = 18\text{ft}$ en $C = 39\text{ft}$ (de eenheid *feet* is een Angelsaksische lengte-eenheid). We vinden dan D op ongeveer 11ft.

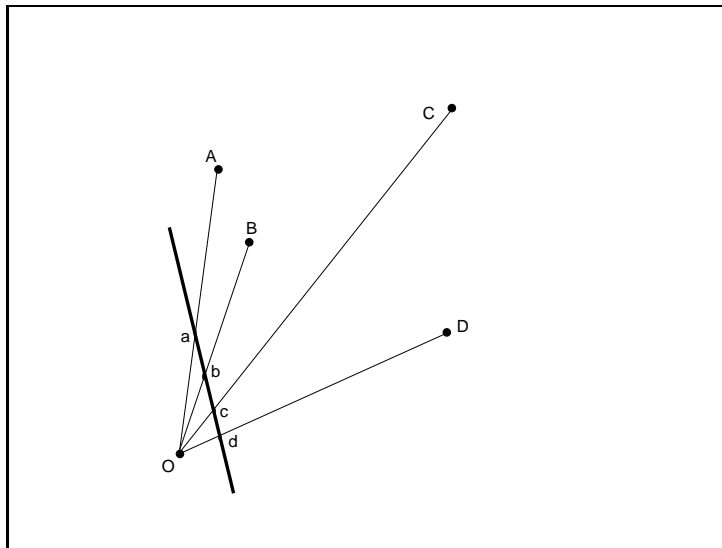


4 De dubbelverhouding van kijkrichtingen

De dubbelverhouding is dus een karakteristiek van het tafereel dat uit de foto kan berekend worden. Voor een gegeven cameracentrum O is dit getal onafhankelijk van de afstand tussen O en de beeldlijn (zoom-invariant), en onafhankelijk van de hoek van de beeldlijn (camerarichting-invariant). Dit betekent dat $(ABCD)$ bepaald wordt door de rechten (kijk-richtingen) OA, OB, OC, OD , en niet zozeer door de beeldlijn. Een gevolg is dat de dubbelverhouding ook algemener kan gedefinieerd worden voor punten A, B, C, D die niet op eenzelfde lijn liggen, maar bekeken worden vanuit punt O :

$$(OA, OB, OC, OD) = (abcd)$$

met a, b, c, d de perspectieve projecties van A, B, C, D vanuit O op een willekeurige beeldlijn.



Praktisch nemen we aan dat zowel de herkende wereldpunten A, B, C, \dots als de camera O loodrecht geprojecteerd worden in eenzelfde horizontaal vlak, dat we bijvoorbeeld ter hoogte van de onderste rand van de foto situeren. De dubbelverhouding (OA, OB, OC, OD) kan dan berekend worden uit de loodrechte projecties a, b, c, d van de overeenkomstige beeldpunten op de onderkant van de foto.

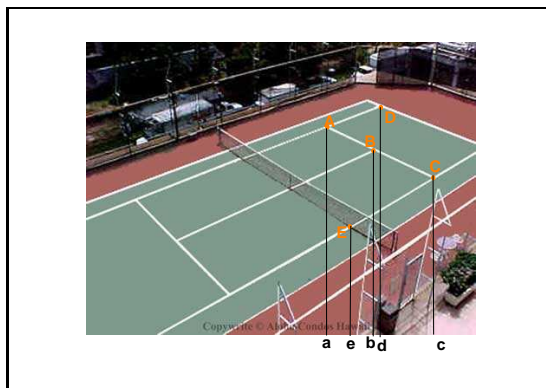
Voorbeeld: Op de foto van het tennisveld hiernaast meten we onderaan (in pixeleenheden):

$$a = 280, b = 335, c = 402, d = 340, e = 307$$

Hieruit kunnen we de volgende informatie berekenen voor de kijkrichtingen vanuit O :

$$(OA, OB, OC, OD) = (abcd) = 0,1517$$

$$(OA, OB, OC, OE) = (abce) = -1,8883$$



5 Bepaling van de cameraplats in een eenvoudig geval

Stel nu dat we in het geval verkeren van voorgaande foto van het tennisveld, namelijk dat we vijf punten in het beeld kunnen herkennen waarvan we de plaats op een grondplan kunnen aanduiden: A, B, C, D, E . Neem bovendien aan dat juist drie van deze vijf punten op eenzelfde rechte l liggen, bijvoorbeeld A, B, C (zoals in bovenstaande foto).

Door metingen in het beeld kennen we de waarden van de dubbelverhoudingen volgens dewelke het cameracentrum O deze punten ziet: (OA, OB, OC, OD) en (OA, OB, OC, OE) . Stel nu D' het snijpunt van OD met $l (= AB = AC)$, en

E' het snijpunt van OE met l . Merk op dat we deze punten D' en E' kunnen berekenen en op het grondplan kunnen aanduiden, omdat

$$(A, B, C, D') = (OA, OB, OC, OD) \quad \text{en} \quad (A, B, C, E') = (OA, OB, OC, OE)$$

Maar dan vinden we hieruit dus ook het cameracentrum O als het snijpunt van de rechten DD' en EE' .

Voorbeeld: Voor bovenstaande foto hadden we reeds berekend dat $(OA, OB, OC, OD) = 0,1517$ en $(OA, OB, OC, OE) = -1,8883$. Op het grondplan hiernaast van ditzelfde tennisveld kunnen we de overeenkomstige punten de volgende coördinaten geven:

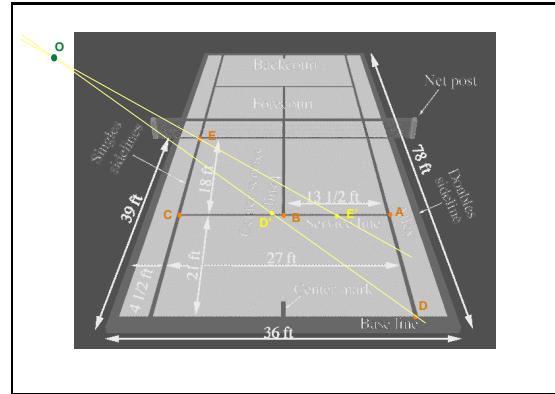
$$A = (27; 0) \quad B = (13,5; 0) \quad C = (0; 0)$$

$$D = (27; 21) \quad E = (0; -18)$$

Uit de berekende dubbelverhoudingen vinden we

$$D' = (12,3917; 0) \quad \text{en} \quad E' = (20,0562; 0)$$

We kunnen vervolgens de cameraplats reconstrueren als het snijpunt van DD' en EE' .



6 De kegelsnede van Chasles (*)

Laten we even terugkeren naar het romantische Parijs. Beschouw de herkenningpunten A, B, C, D op de eerste foto. De plaats O van de camera mag dan onbekend zijn, de foto onthult wel de dubbelverhouding waaronder O naar deze punten kijkt. Inderdaad, deze dubbelverhouding kan berekend worden uit de gemeten horizontale afstanden tussen de beelden van deze herkenningpunten. Reken maar zelf na:

$$(OA, OB, OC, OD) = (abcd) \approx 1,206$$

(De afstanden mogen gemeten worden in cm, mm, fotopixels of om het even wat; de eenheid valt immers weg in de verhouding.)

Dit is dus al een tastbaar resultaat dat ons iets zegt over het camerastandpunt O . Maar het is niet genoeg. Het getal 1,206 bepaalt nog niet ondubbelzinnig de plaats O , want er bestaan meerdere punten X in het vlak waarvoor $(XA, XB, XC, XD) = (OA, OB, OC, OD) = 1,206$. Het is zelfs zo dat indien de herkenningpunten A, B, C, D op eenzelfde lijn liggen, dan geldt voor **ieder** punt X dat $(XA, XB, XC, XD) = (OA, OB, OC, OD) = (ABCD)$, zodat het getal 1,206 geen enkele nuttige informatie geeft. Maar gelukkig loopt het zo een vaart niet in ons voorbeeld.

De wiskundige Michel Chasles (1793-1880) heeft gevonden dat alle projectiecentra X die vier gegeven punten A, B, C, D onder een gegeven dubbelverhouding $\rho = (XA, XB, XC, XD)$ “zien”, op een kegelsnede liggen. We veronderstellen dat de vier punten niet op dezelfde rechte liggen. Om de vergelijking van deze kegelsnede op te schrijven, hebben we wat notatie nodig. Als $X = (x, y)$, $A = (a_1, a_2)$ en $B = (b_1, b_2)$, dan stellen we

$$[XAB] = \begin{vmatrix} x & a_1 & b_1 \\ y & a_2 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a_2 - b_2)x - (a_1 - b_1)y + a_1b_2 - a_2b_1$$

Merk op dat $[XAB] = 0$ een vergelijking is voor de rechte door A en B . Men kan nu bewijzen dat de *kegelsnede van Chasles* gegeven wordt door:

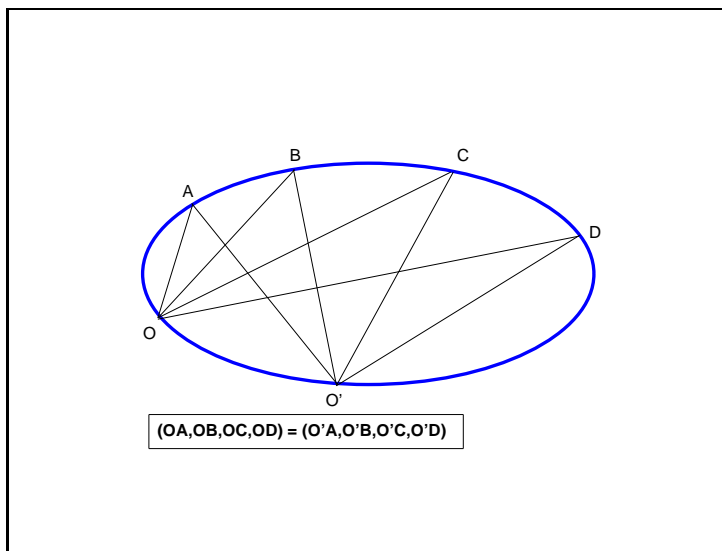
$$K_\rho : (\rho - 1)[XAC][XBD] - \rho[XAB][XCD] = 0$$

Bij een gegeven dubbelverhouding ρ en punten A, B, C, D is dit inderdaad een kwadratische vergelijking.

Een kegelsnede is een kromme in het vlak die gegeven wordt door een kwadratische vergelijking. De vorm is dus iets minder saai dan een rechte die door een eerstegraadsvergelijking gegeven wordt. Mogelijke vormen zijn *ellipsen*, *parabolen* of *hyperbolen*.

In speciale gevallen kan een kwadratische vergelijking ontbonden worden als product van twee eerstegraadsvergelijkingen, en dan ontgaat de kromme in de unie van twee rechten. Dit gebeurt niet met de kegelsnede van Chasles als we uitgaan van vier punten in algemene stand. Echter, indien juist drie van de vier punten collineair zijn dan ontgaat de kegelsnede van Chasles in twee rechten waarvan de eerste de drie collineaire punten bevat, en de tweede bepaald wordt door het vierde punt en het cameracentrum O .

Het is een eenvoudige oefening om na te gaan dat de punten A, B, C, D zelf ook op de kegelsnede K_ρ liggen. We illustreren dit met een ellips door deze punten (zie figuur). Ieder vijfde punt O op de ellips aanschouwt A, B, C, D onder dezelfde dubbelverhouding. Indien het perspectiefpunt binnen of buiten de ellips genomen wordt, dan zal deze dubbelverhouding niet meer dezelfde zijn.



Voorbeeld. Stel $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, $D = (1, 1)$ en $\rho = 2$. Dan vinden we

$$[XAC] = -x, [XBD] = -x + 1, [XAB] = y, [XCD] = y - 1$$

en dus

$$K_\rho : x^2 - 2y^2 - x + 2y = 0$$

Ieder punt op deze kegelsnede ziet de punten A, B, C, D onder dubbelverhouding $\rho = 2$.

Tussen haakjes: Begrippen zoals kegelsneden en de dubbelverhouding horen thuis in het vak *Projectieve Meetkunde*, een deelgebied van de wiskunde. Maar ook in toepassingen, zoals het hier behandelde probleem, verheugen we ons in de aanwezigheid van kegelsneden. Zo kenden ellipsen bijvoorbeeld hun grote doorbraak dankzij het werk van Kepler, die ontdekte dat de planeten een ellipsbaan volgen rond de zon. Parabolen zijn dan weer nuttig als geschikte vorm bij telescopen of schotelantennes.

7 De algemene oplossing (*)

We hernemen onze opgave over de foto van de lichtstad. We hadden reeds berekend dat het cameracentrum O de herkenningspunten A, B, C, D onder een dubbelverhouding van 1,206 ziet. Volgens de Stelling van Chasles moet de camera zich op een bepaalde kegelsnede bevinden. We kiezen de oorsprong in de linkerbenedenhoek van de plattegrond, zodat de x -as samenvalt met de onderste rand en de y -as met de linkerrand. We gebruiken de volgende coördinaten:

$$A = (3, 9; 5, 3), \quad B = (0, 4; 3, 0), \quad C = (1, 5; 5, 6), \quad D = (6, 0; 9, 3)$$

Na berekening vinden we de volgende ellips (zie ook onderstaande figuur):

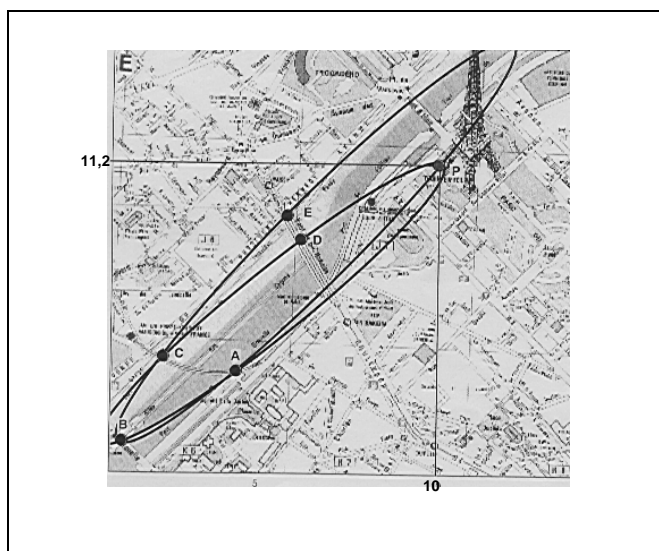
$$-10,652x^2 + 25,331xy - 16,226y^2 - 80,109x + 111,850y - 186,166 = 0$$

Nu herhalen we deze procedure voor de punten A, B, C, E . Alweer in de foto meten we de nodige horizontale afstanden en berekenen de dubbelverhouding waaronder het cameracentrum O naar deze vier punten kijkt. Volgens mijn berekeningen:

$$(OA, OB, OC, OE) = 1,315$$

Dit bepaalt opnieuw een kegelsnede van Chasles, ditmaal door A, B, C, E (zie onderstaande figuur):

$$-13,969x^2 + 27,539xy - 14,554y^2 - 73,711x + 91,346y - 144,352 = 0$$



We zijn nu zo dicht bij de oplossing dat we ze kunnen ruiken. De twee ellipsen die we gevonden en getekend hebben op het grondplan van Parijs, bevatten allebei de gezochte plaats van de camera. In het algemeen hebben twee kegelsneden steeds vier snijpunten (waarvan sommige onder bepaalde omstandigheden kunnen samenvallen of “imaginair” zijn). Drie van deze snijpunten zijn natuurlijk de herkenningspunten A, B, C , omdat zij gemeenschappelijk waren in beide constructies voor de kegelsnede van Chasles. Het resterende vierde snijpunt is dus de gevraagde cameraplaats. We vinden dus (een beetje voorspelbaar) dat de fotograaf zich op de Eiffeltoren bevond (locatie $(10, 0; 11, 2)$). Een mooie toevalligheid is dat Michel Chasles een van de 72 namen is van Franse wetenschappers die op de Eiffeltoren gegraveerd zijn.

8 Extra: snijpunten berekenen van twee kegelsneden (*)

Wie deftige wiskunde-software op zijn pc heeft draaien, kan aan het programma vragen om de gevonden ellipsen uit te tekenen, en alzo de gezochte cameraplaats als vierde snijpunt aflezen. Of beter, je kan misschien meteen aan je programma vragen om de snijpunten van twee kegelsneden te berekenen.

Hieronder schetsen we een methode voor wie (noodgedwongen of uit liefhebberij) de ambachtelijke weg verkiest. Vergeet niet dat we bij deze berekening starten met een onmiskenbaar voordeel: drie van de vier snijpunten zijn gekend!

Bekijk eerste de algemene situatie, waarbij we de doorsnede moeten berekenen van de kegelsneden:

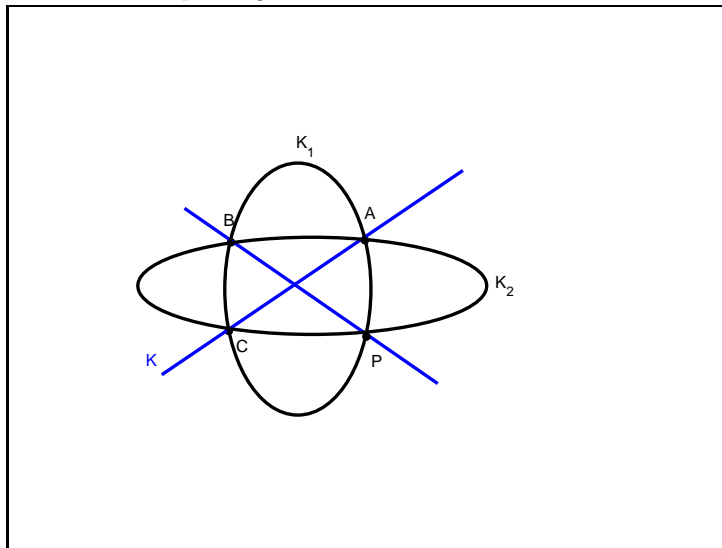
$$K_1 : F_1(x, y) = 0 \quad \text{en} \quad K_2 : F_2(x, y) = 0$$

Door een lineaire combinatie van beide vergelijkingen bekommen we een nieuwe kromme:

$$K : F(x, y) = F_1(x, y) + wF_2(x, y) = 0$$

Het is niet moeilijk om in te zien dat ieder snijpunt P van K_1 en K_2 ook op K ligt.

De kunst ligt er nu hier in om w zodanig te kiezen dat K een *ontaarde* kegelsnede is, m.a.w. de unie van twee rechte (zie figuur hiernaast). Elk van deze rechten bevat twee van de snijpunten. Het berekenen van de doorsnede van twee kegelsneden kan dus herleid worden tot het snijden van een rechte met een kegelsnede (tweemaal uitvoeren), wat technisch een stuk aangener is.



Als we nu bovendien drie van de vier snijpunten al kennen, dan beschikken we over een rechte van de ontaarde kegelsnede, en is de tweede rechte ook gedeeltelijk gekend. Dit helpt ons bij het vinden van de parameter w . We illustreren dit met een voorbeeld.

Voorbeeld. Gegeven zijn twee kegelsneden:

$$K_1 : 2x^2 - y^2 - 2x + y = 0 \quad \text{en} \quad K_2 : x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$$

De volgende punten liggen op de doorsnede (zoals direct kan worden nagegaan):

$$A = (0, 1), \quad B = (1, 0), \quad C = (0, 0)$$

Hoe vinden we het vierde snijpunt P ? Een ontaarde kegelsnede door deze vier punten kan als volgt beschreven worden:

$$x(ax + by - a) = 0$$

waarbij de eerste factor naar de rechte AC verwijst, en de tweede factor naar de rechte BP (met P nog onbekend). De parameter w in de combinatie $F_1 + wF_2 = 0$, die een ontaarde kegelsnede oplevert, voldoet aan:

$$(2 + w)x^2 - wxy + (w - 1)y^2 - (2 + w)x + (1 - w)y = ax^2 + bxy - ax$$

Door gelijkstelling van coëfficiënten bekommen we het volgende stelsel met lineaire vergelijkingen in de onbekenden a, b, w :

$$\begin{aligned} 2 + w &= a \\ -w &= b \\ w - 1 &= 0 \\ 2 + w &= a \\ 1 - w &= 0 \end{aligned}$$

De laatste twee vergelijkingen zijn overbodig. Vrij snel vinden we de oplossingen

$$w = 1, a = 3, b = -1$$

Dus, de tweede component van de ontaarde kegelsnede is de rechte

$$l: 3x - y - 3 = 0$$

We nemen nu een van de twee kegelsneden, bijvoorbeeld K_1 , en snijden deze met l :

$$\begin{cases} l & : y = 3x - 3 \\ K_1 & : 2x^2 - y^2 - 2x + y = 0 \end{cases}$$

Na de substitutie van y in de tweede vergelijking:

$$\begin{cases} y = 3x - 3 \\ -7x^2 + 19x - 12 = 0 \end{cases}$$

Deze vierkantsvergelijking in x heeft oplossingen 1 en $12/7$. De oplossing $x = 1$ leidt tot het gekende punt B . Uiteindelijk vinden we:

$$P = \left(\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right)$$

9 Bronnen

De hoofdbron voor dit document is het artikel van Ian Stewart:

De quel endroit la photo a-t-elle été prise ?

uit het boek “**Visions Géométriques**”, uitgegeven door “Pour la Science” in 1994. Van deze bron heb ik de foto’s van Parijs ontleend.

Andere bronnen:

- C. Tripp, “Where is the camera?”, *The Mathematical Gazette*, maart 1987 (p8 - p15).
- Kegelsneden op **Wikipedia**: <http://nl.wikipedia.org/wiki/Kegelsnede>
- Een inleiding op Projectieve Meetkunde: <http://www.math.poly.edu/courses/projective-geometry/Inaugural-Lecture/inaugural.html>